Sci30105 Modern Physics

Special Relativity

Compiled by:

Aj Rungroj Tuayjaroen

Department of Physics, Mahidol Wittayanusorn School

Contact: rungroj.tjr@mwit.ac.th

Date: 14 - 18 Jun 2021 (Week4)

Outline

of Special relativity

Origin of special relativity

Consequence of Einstein' theory

The Lorentz transformation

Relativity of momentum and energy

General relativity

Leaning Objectives

By the end of this section, you will be able to

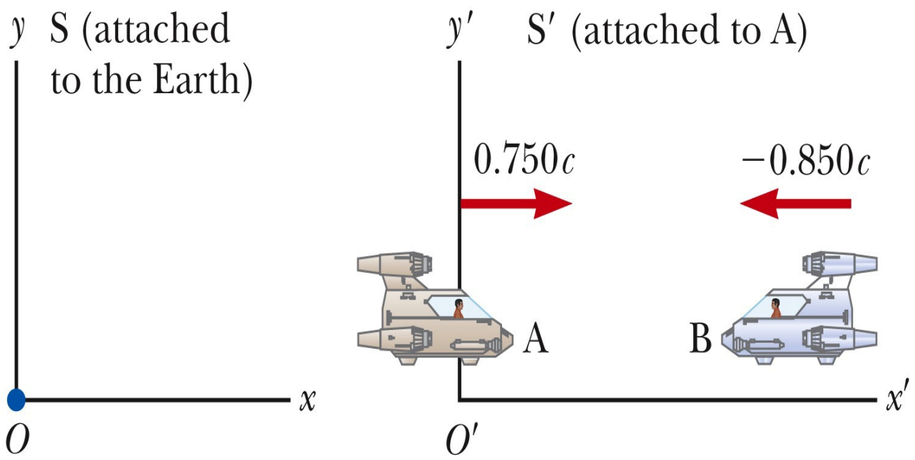
- Define relativistic momentum in term of mass and velocity and show how relativistic momentum relates to classical momentum
- Describe relationship between the relativistic total energy, the relativistic kinetic and the energy of rest particle

Last class !!!

The Lorentz velocity transformation

Ex1: The Lorentz velocity transformation

ยานอวกาศ A และ B เคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้าม ดังรูป ผู้สังเกตบนโลกวัดอัตราเร็วของ A ได้ 0.75 c และอัตราเร็วของ B ได้ 0.85 c หาความเร็วของ B เทียบกับ A **(-0.98 c)**



© Cengage Learning. All Rights Reserved.

The Lorentz velocity transformation

In x axis

$$u'_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{dx'}{dt'} \quad = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\gamma\left(\frac{dx}{dt} - V\frac{dt}{dt}\right)}{\gamma\left(\frac{dt}{dt} - \frac{V}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}\right)}$$

From $x' = \gamma(x - Vt)$

$y' = y$

$z' = z$

$t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - V}{1 - \frac{u_x V}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{u_x V}{c^2}\right)} \quad \text{and} \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{u_x V}{c^2}\right)}$$

Relativistic momentum

Relativistic momentum

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma m\vec{u}}$$

Please note that velocity u now is object or particle velocity for one observer. This u is not a speed of reference frame.

Relativistic momentum

With the new equation of momentum, we can find kinetic energy in relativity by

$$E_k = \int F\,dx = \int \frac{dp}{dt}\,dx$$

Replace $\mathrm{d}p$ with the $\mathrm{d}(\gamma m u)$ and dx with udt. Do a little calculus then it will become

This is the kinetic energy of
Particle with speed u in relativity

$$\boxed{E_k = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2}$$

$$E_k = mc^2\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{u^2}{c^2}\right) + \cdots - 1\right]$$

Type equation here.Basically, this E_k must be $\frac{1}{2}mu^2$ when particle speed is very low. You can find by let $u \ll c$ in γ. You will surprisingly realize that it is $\frac{1}{2}mu^2$

Relativistic Energy

From kinetic energy

$$\boxed{E_k = \gamma mc^2 - mc^2}$$

The term $\boldsymbol{mc^2}$ can be called **rest energy** because it doesn't depend on any velocity, it is constant.

If we have look again to equation, it is

$$kinetic\ energy = ?\ energy - rest\ energy$$
$$?\ energy = kinetic\ energy + rest\ energy$$

Hence we can intuitively know that ?energy is total energy

$$\boxed{Total\ Energy = E = \gamma mc^2}$$

Relativistic Energy

We know that $E = \gamma mc^2$ and $p = \gamma mu$
To find the equation without any form of u. You can try by a little algebra and get

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

In this way we can find energy of light (photon), zero mass

$$E_{photon} = pc$$

We already know light (photon) has energy, then this equation tell us that the light has momentum. The momentum is the particle property. Hence the concept of physics now is expanded by use the concept of particle to light.

Ex1: Relativistic Energy

ก. จงหาพลังงานหยุดนิ่งของโปรตอนในหน่วยของ จูลน์ และ อิเล็กตรอนโวลต์ **(1.504e-10 J, 938 MeV)**

ข. ถ้าพลังงานสุทธิของโปรตอนตัวหนึ่งเป็นสามเท่าของพลังงานหยุดนิ่ง อัตราเร็วของโปรตอนมีค่าเท่าไร **(2.83e8 m/s)**

ค. จงหาพลังงานจลน์ของโปรตอนในหน่วยอิเล็กตรอนโวลต์ **(1.88e3 MeV)**

ง. โมเมนตัมของโปรตอนเป็นเท่าไหร่ **(2.65e3 MeV/c)**

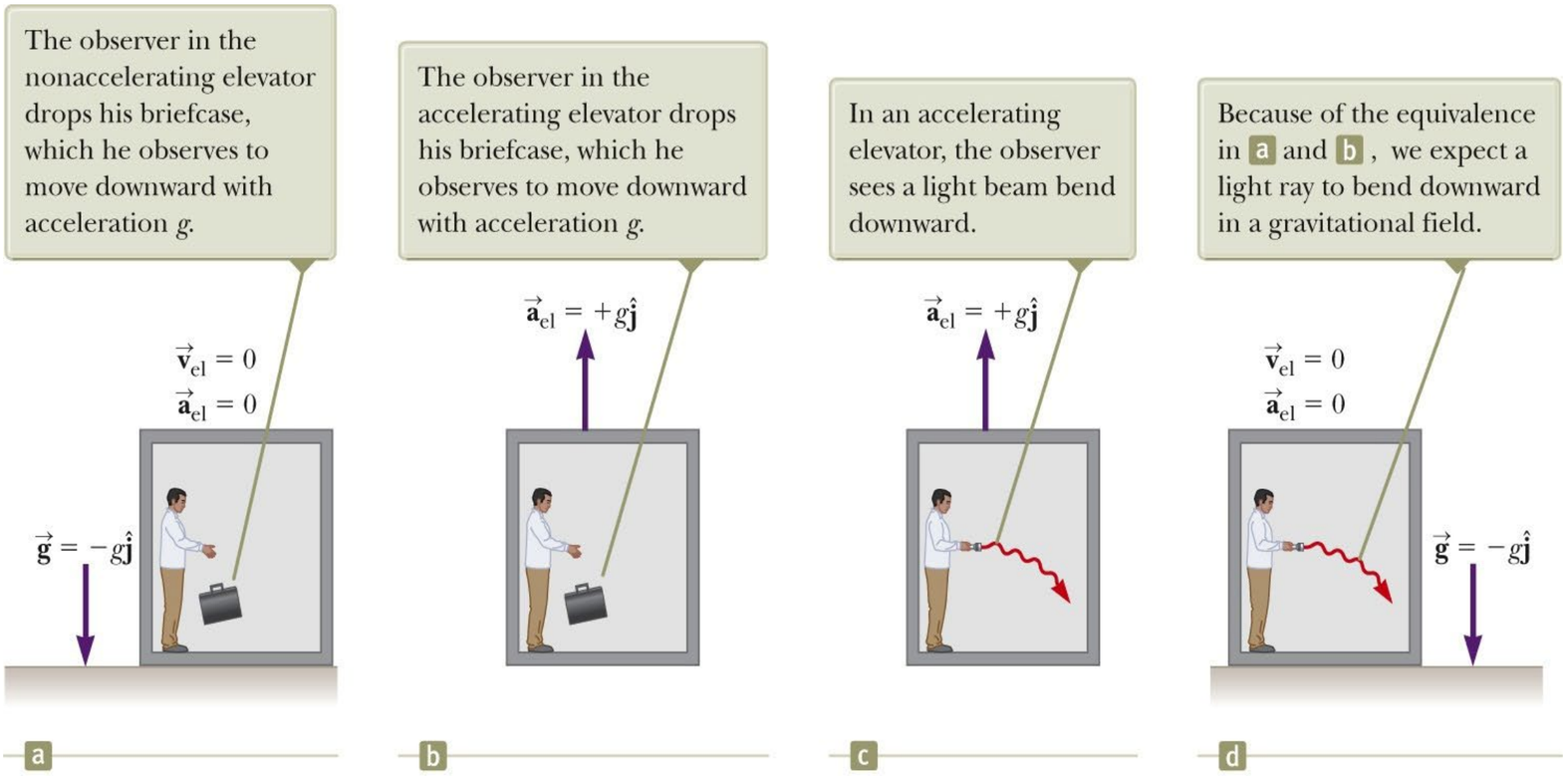
จ. ถ้าเพิ่มโมเมนตัมของโปรตอนเป็นสองเท่าจะสามารถคำนวณหาพลังงานจลน์ของโปรตอนเป็นเท่าไหร่ **(4.7 mc^2 , 4.55e3 MeV)**

Ex3: Time Dilation

A GPS Satellites move at a speed of 3,874 m/s relative to Earth.
Ignoring gravitational effects, calculate how much slower the satellite clock than a clock on Earth after one day (86,400 s) due to Special Relativity?

General Relativity

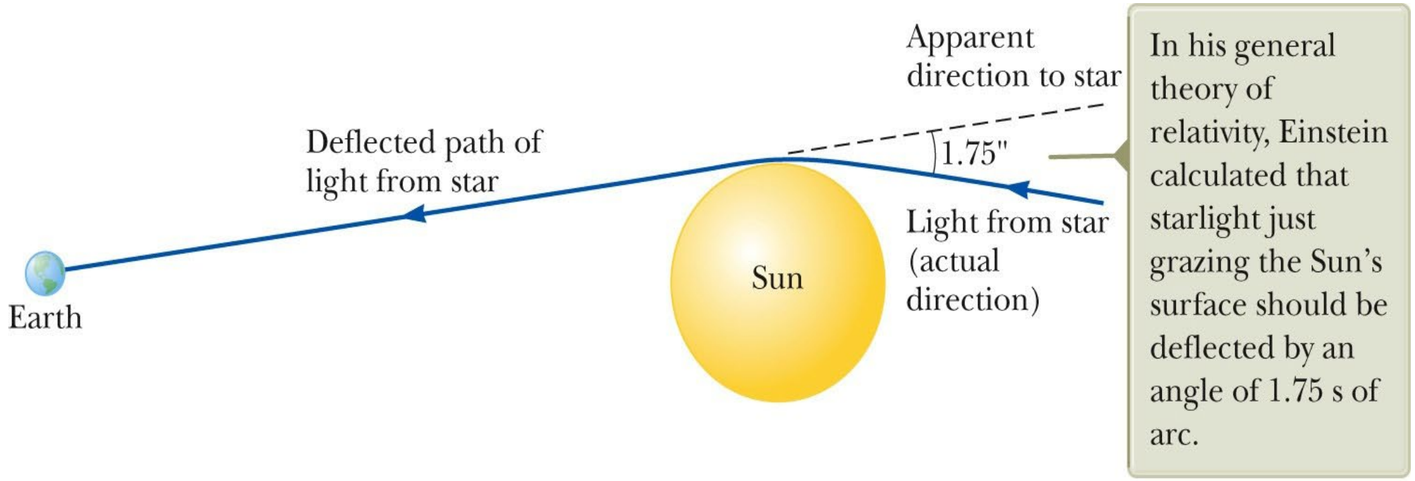
Einstein wanted to extend his work on Special Relativity to include non-inertial frames of reference and as a result discovered the link between gravity and accelerated motion. This led him to his **General Theory of Relativity**



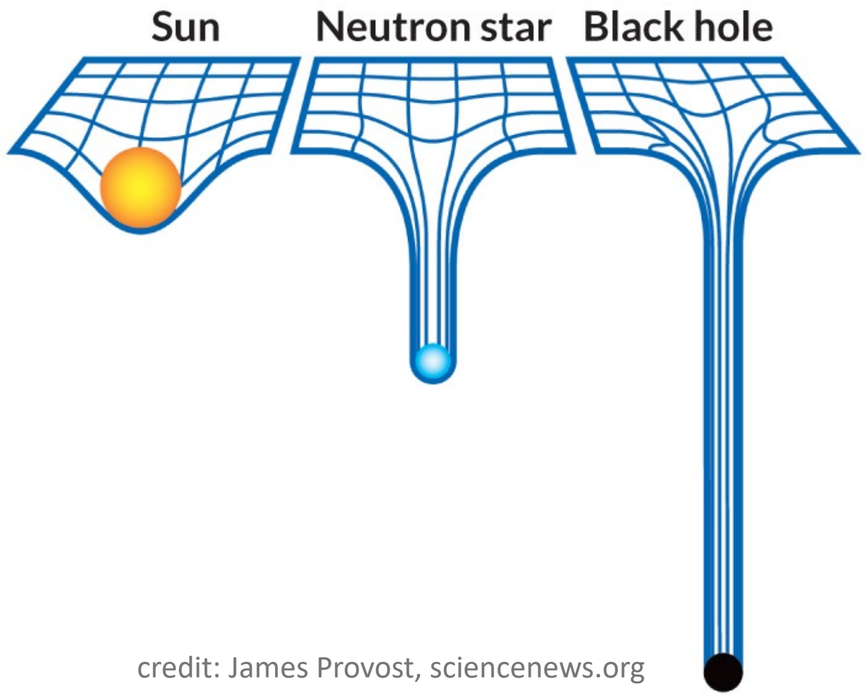
© Cengage Learning. All Rights Reserved.

General Relativity (**The Equivalence Principle**)

An observer in a clocked box, such as an elevator or spaceship, cannot tell whether his weight is due to gravity or acceleration.

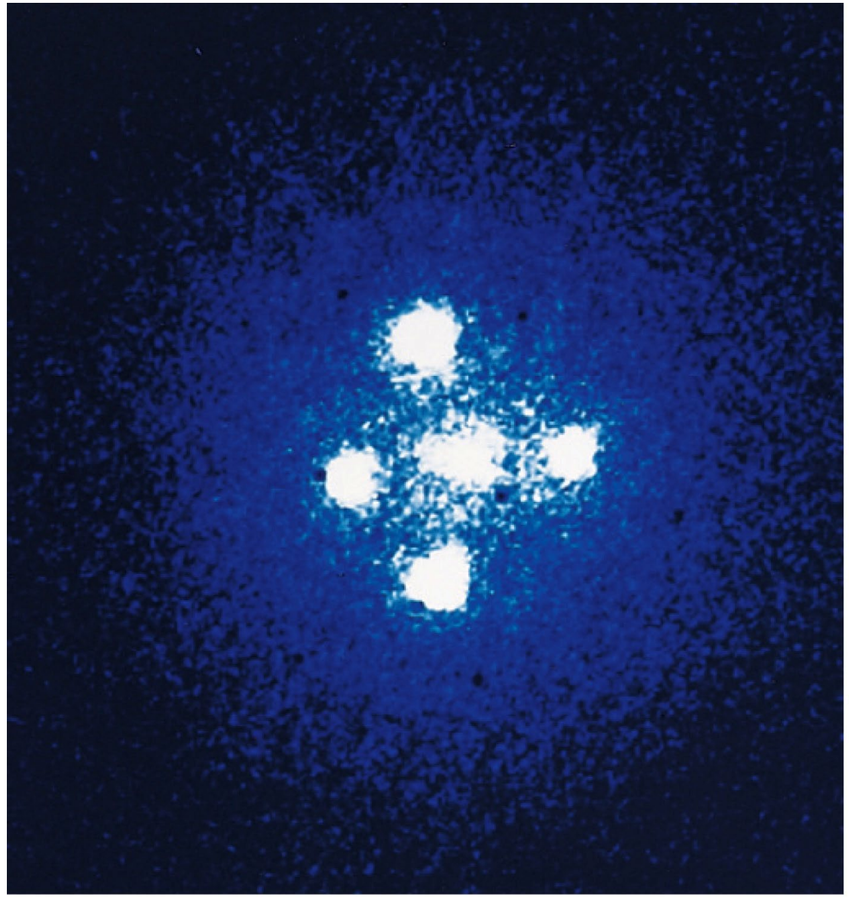


© Cengage Learning. All Rights Reserved.

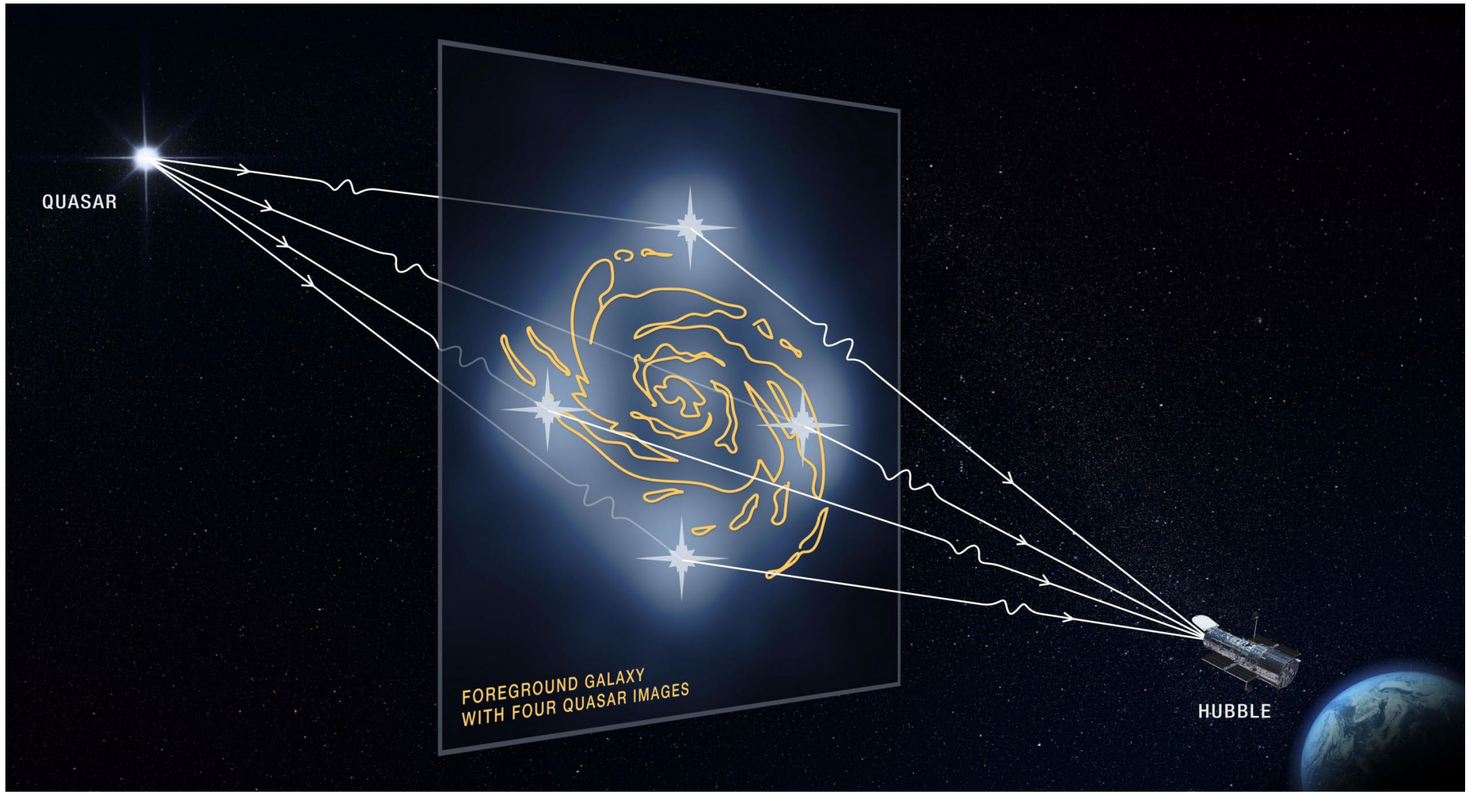


credit: James Provost, sciencenews.org

General Relativity (**observable phenomena**)



Courtesy of NASA



Credit: NASA, ESA and D. Player (STScI)

Global Positioning System (GPS) and Relativity

The grater the gravitational field strength, the greater the stretching of spacetime, clock ticks slower ~7 microsecond.
So clocks on the surface of the Earth will run slower than a clock on a satellite.
Clocks on GPS satellites need to be adjusted to take account of GR (They need to be slower by 45 microseconds per day)

So, the error cause clock in satellites run 38 microsecond faster a day. This difference causes the GPS to be off by **11.5 km** a day.

ตัวอย่าง งูสายฟ้าเผชิญนักฆ่าปังตอคู่

งูสายฟ้าความยาวตอนหยุดนิ่งเท่ากับ 1.00 m กำลังเคลื่อนที่ตามแกน x ไปทางทิศบวก x ผ่านหน้านักฆ่าปังตอคู่ด้วยอัตราเร็วสูงขนาดที่ทำให้นักฆ่าวัดความยาวของงูได้ยาวแค่ 0.80 m นักฆ่าปังตอคู่ถือปังตออยู่ในมือแต่ละข้างห่างกัน 0.90 m เขาสับปังตอทั้งสองลงไปพร้อมกันและยกปังตอขึ้นทันที โดยที่ปังตอขวาเฉี่ยวหัวงูพอดี เนื่องจากเขาวัดได้ว่างูสายฟ้าที่กำลังเคลื่อนที่ยาว 0.80 m เขาคิดว่าปังตอคู่ที่เขาสับลงไปจะไม่โดนตัวงู (แต่อาจทำให้งูเสียวนิดหน่อย) แต่เมื่อมองในแง่ของผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงของงู เขาจะเห็นนักฆ่าถือปังตอเคลื่อนที่ผ่านเขาไปทางทิศลบ x และวัดระยะทางระหว่างปังตอว่าสั้นกว่า 0.90 m ซึ่งสั้นกว่าความยาวงูตอนหยุดนิ่งแน่ ๆ ดังนั้นปังตอที่สับลงมาน่าจะสับโดนงู แต่ถ้าตัวงูขาด ผู้สังเกตในทั้งสองกรอบอ้างอิงจะต้องเห็นว่าตัวงูขาดเหมือนกัน เราจะอธิบายความเห็นขัดแย้งกันนี้ได้อย่างไร

Part 1: ก่อนอื่นเราหาว่างูกำลังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่าใดเทียบกับนักฆ่า

จาก $L = \frac{L_0}{\gamma}$ เมื่อแทนค่า $L_0 = 1.00\ \text{m}$ และ $L = 0.80\ \text{m}$ เราจะได้ว่า $\gamma = \frac{1.00\ \text{m}}{0.80\ \text{m}} = \frac{5}{4}$

แต่ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$ ดังนั้น เมื่อแทนค่า γ แล้วยกกำลังสองสมการทั้งสองข้างเราจะได้ว่า

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{1 - V^2/c^2} \quad \Rightarrow \quad 1 - V^2/c^2 = \frac{16}{25} \quad \Rightarrow \quad V = 0.6c$$

Part 2: ตำแหน่งที่เปลี่ยนแปลงไปของ ปังตอทั้งสอง ในกรอบของงูสายฟ้า

จาก $L' = \dfrac{L_0'}{\gamma}$ เมื่อแทนค่าระยะทางระหว่างปังตอในกรอบของนักฆ่า $L_0' = 0.90\ \text{m}$ และ $\gamma = 5/4$ เราจะได้ว่า

$L' = \dfrac{0.90\ \text{m}}{5/4} = 0.72\ \text{m}$ นั่นคือ งูสายฟ้าวัดว่าตำแหน่งที่ปังตอคู่สับลงมาห่างกัน $0.72\ \text{m}$

งูต้องโดนตัดขาดแต่ ทำไมงูถึงไม่โดนฟันขาดจริง

Part 2: ตำแหน่งที่เปลี่ยนแปลงไปของ ปังตอทั้งสอง ในกรอบของงูสายฟ้า

จากการแปลงระบบพิกัดและเวลาแบบลอเรนต์ซ $x' = \gamma(x - vt)$ และ $t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$

$$x_1' = (5/4)(0\text{m} - 0.6c \times 0.0s) = 0.0\text{m}$$

$$x_2' = (5/4)(-0.9\text{m} - 0.6c \times 0.0s) = 1.125\text{m}$$

และ

$$t_1' = (5/4)(0\text{s} - 0.6c \times 0\text{m}) = 0.0\text{s}$$

$$t_2' = (5/4)(0\text{s} - 0.6c \times (-0.90\text{m})) = \frac{0.675}{c}\ \text{s}$$

Summary

- The Lorentz velocity transformation.
- The relativistic momentum and energy
- Describe the difference between the special relativity and the general relativity.